数理解析研究所講究録
1091 巻 1999 年 144-156

A survey of small class number problems for CM-fields and related problems

防衛大　山村　健　(Ken Yamamura)

Title の CM-体とはもちろん総実代数体の総虚 2 次拡大体のことであり (ただし, 有限次であるとする), CM-体についての small class number problems とは, 以下の 3 つの問題を想定している:

- (相対) 類数が一定以下の CM-体は高々有限個しかないこと (finiteness theorem) を証明すること;
- (相対) 類数が一定以下の CM-体をすべて決定すること (determination);
- (相対) 類数が一定以下の CM-体を特徴づけること (characterization).

ここでは歴史をふまえながら, これらの問題および関連する事柄の brief survey を与えることを目的とする.

1 Finiteness theorem

1.1 類数問題

CM-体の類数問題の起源は Gauss の (2 次形式に関する) 類数問題である. (Gauss は類数 1 の虚 2 次体はちょうど 9 個であると予想した.) ここでは, finiteness theorem について, 知られていることを簡単にまとめてみよう. Finiteness theorem とは上で述べたように, 次の形の定理である:

Finiteness theorem. 任意の自然数 N について, (相対) 類数が N 以下の $\boxed{\quad\ \text{体}}$ は高々有限個しかない.

この形の定理は, $\boxed{\text{虚 2 次体}}$ については, Heilbronn により 1934 年に証明された [18]. ただし, 彼が証明したのは, 一般 Riemann 予想 (GRH) が正しくなければ, 定理が正しいという (怪しげな?) 結果で, 本質的なのはそれ以前の Hecke により得られた Siegel の零点の不在を仮定しての $L(1,\chi)$ の下からの評価である. ここで, χ はもちろん虚 2 次体に付随する Dirichlet 指標である.

これが $\boxed{\text{虚 Abel 体}}$ にまで一般化されたのは, それよりかなり後の 1971 年であり, Uchida による [30]. 彼の証明は effective でないものと effective なものと 2 種類あり, 前者は Brauer-Siegel の定理を利用したものであり, 後者は $L(1,\chi)$ の積を評価したもので, 6 次以上の体について effective な評価が得られる. 彼は前者の方法で, $\boxed{\text{一定次数の CM-体}}$ についても finiteness theorem が得られることを注意している. 前者の方法による結果をより正確に述べると, 彼は K が $[K:\mathbf{Q}]/\log|d(K)| \to \infty$ ($d(K)$ は K の判別式) なる正規 CM-体もしくは次数が一定 (以下) の CM-体を動くとき, K の相対類数 $h^-(K)$ について,

$$\liminf \frac{\log h^-(K)}{\log \sqrt{|d(K)|}} \geq \frac{1}{2}$$

であることを示している. ここで, 注意すべき要点は, CM-体 K とその最大総実部分体 K_+ の単数規準の間に成り立つ次の簡単な関係式である:

$$QR(K) = 2^{[K:\mathbf{Q}]/2-1} R(K_+).$$

(ここで, Q は K の Hasse の unit index である.) かなり荒っぽい言い方をすれば, K および K_+ に Brauer-Siegel の定理を適用した結果の差をとれば, 上の不等式が出る.

Finiteness theorem は Odlyzko により 1976 年に一般の $\boxed{\text{CM-体}}$ にまで拡張された. ただし, 彼の結果の主要な部分は Stark の結果 [29] に依存する. また, 彼の結果は完全に無条件というわけではなく, 場合によっては, Artin 予想あるいは GRH を仮定しなければならない. 彼の得た結果は次のようなものである.

定理 1. (A. M. Odlyzko [26, Theorem 2]) ある *effective* に計算できる正の定数 c および δ が存在して, K を $2m$ 次の *CM*-体とし, K_+ をその最大総実部分体するとき, K の相対類数 $h^-(K)$ について

$$h^-(K) > c[mg(m)]^{-1}(1+\delta)^m$$

が成り立つ. ここで,

$$\mathbf{Q} = k_0 \subset k_1 \subset \cdots \subset k_l = K_+ \quad (k_{i+1}/k_i \text{ は正規})$$

なる体の列が存在するときは, $g(m) = 1$ で, そうでないときは, $g(m) = m!$. ただし, *Artin* 予想あるいは *GRH* を仮定すれば, $g(m) = m!$ を $g(m) = m$ で置き換えることができる.

$h^-(K)$ を評価することは, K/K_+に対応する指標 χ について, $L(1, \chi)$ を評価することと同じである. 良い評価を得るための最大の障害が, 臨界領域内の 1 に近い零点であり, 特に, 1 に極めて近い零点 (いわゆる Siegel の零点, あるいは例外零点) の存在の否定 (あるいはその control) が類数問題にとって一番厄介な問題である. Odlyzko が用いた Stark の結果の主要な部分は, 1 と (存在を否定できない) Siegel の零点との距離の下からの評価で, これが小さすぎることはない, というものである. (そこに $g(m)$ が登場する. 詳細は [26] 参照のこと.)

1.2 Chowla の結果とその一般化

次に, 類数よりやや強い形の結果として, 1934 年の Chowla の結果とその一般化について述べよう.

定理 2. (S. Chowla [10]) 判別式 d の虚 2 次体の主種に含まれる *ideal* 類の個数を $p(d)$ で表せば,

$$p(d) \to \infty. \quad (|d| \to \infty)$$

注意. 2 次体の主種 (principal genus) とは, 平方類全体のことであり, 種の理論により, 虚 2 次体の場合, d の素因数の個数を t とすれば, $p(d) = h(\mathbf{Q}(\sqrt{d}))/2^{t-1}$ である. 上の Chowla の結果は 1935 年の Siegel の定理

$$\log(h(\mathbf{Q}(\sqrt{d}))) \sim \log\sqrt{|d|} \quad (|d| \to \infty)$$

を思い起こせば, 当然の結果であると納得がいくものである. Chowla の結果から, 特に $p(d) = 1$ である, すなわち各種に 1 つの類のみ含むような虚 2 次体は高々有限個しかないことがわかる. (このようなことも Gauss によってすでに予想されており, その判別式の list も与えられていた.) ところで, $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ とおくと,

$$p(d) = 1 \iff h(K) = 2^{t-1} = g(K) \iff K_{Hilb} = K_{gen}$$

である．ここで，$g(K)$ は K の種の数であり，K_{Hilb} および K_{gen} はそれぞれ K の Hilbert 類体および種の体を表す．また，K の類群 $\mathrm{Cl}(K)$ を用いて表現すると，

$$p(d)=1 \Longleftrightarrow \mathrm{Cl}(K)\cong(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^{t-1} \Longleftrightarrow \exp \mathrm{Cl}(K) \leqq 2.$$

ここで，群 G に対して，$\exp G$ は G の冪指数 (exponent) を表す：

$$\exp G := \inf\{\, n\in\mathbf{N} \mid g^n = 1\ \forall g\in G \,\}.$$

したがって，$p(d)=1$ となる虚 2 次体は高々有限個しかないということを次の 2 通りに formulate することができる：

系． $\left.\begin{array}{l}\text{(A) } K_{Hilb}=K_{gen}\text{であるような}\\ \text{(B) } \exp\mathrm{Cl}(K)\leqq 2 \text{ であるような}\end{array}\right\}$ $\boxed{\text{虚 2 次体}}$ K は高々有限個しかない．

(A), (B) それぞれについて一般化が存在する．

まず (A) について．これは 1981 年に Hamamura (Horie) [17] により $\boxed{\text{虚 Abel 体}}$ および $\boxed{\text{一定次数の CM-体}}$ に一般化された．その証明は Stark による $h^-(K)$ の下からの評価と，種の数を $K/\mathbf{Q}$ で分岐する素数とその分岐指数で表す公式を組み合わせるものである．これを一般の $\boxed{\text{CM-体}}$ にまで拡張することは未解決問題である．

次に (B) について．Boyd と Kisilevsky [6] は 1972 年に，Weinberger [32] は 1973 年に独立に，$\exp \mathrm{Cl}(K)=3$ なる虚 2 次体 K の個数の有限性を (無条件で) 証明し，さらに L-関数に関する一般化された Riemann 予想 (ERH) の仮定の下で，

$$\exp \mathrm{Cl}(K) \gg \frac{\log|d|}{\log\log|d|} \quad (|d|\to\infty)$$

を証明した．これにより，ERH の仮定の下で，$\exp \mathrm{Cl}(K)$ が一定以下の虚 2 次体の個数の有限性がしたがう．最近の結果を用いて，彼等の結果を implied constant が explicit であるように formulate し直すと，次のようになる．

定理 3. *ERH* の仮定の下で，

$$e=\exp\mathrm{Cl}(K) \geqq \frac{\log(|d|/4)}{\log(6\log^2|d|)}.$$

また, $d \equiv 1 \pmod 8$ ならば, 無条件で

$$\exp \mathrm{Cl}(K) \geqq \frac{\log(|d|/4)}{\log 2}.$$

この結果を導くための一番の鍵が虚 2 次体で完全分解する最小の素数の上界の評価であり, 我々は定理 3 の証明にこのことを含む次の結果を用いる:

補題. (E. Bach [4]) *ERH* の仮定の下で, 判別式 d の虚 2 次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$ の類群は *norm* が高々 $6\log^2|d|$ の (不分岐な) 素 *ideal* 達で生成される.

定理 3 の証明. p を $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ で完全分解する最小の素数とし, p は K において, $p = \mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ と分解するものとする. このとき, $\mathfrak{p}^e$ は K の単項 ideal であるが, その生成元 α は有理整数ではない. したがって, $\alpha = (a+b\sqrt{d})/2$, $a, b \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$ とおける. $\mathfrak{p}^e = (\alpha)$ の両辺の norm をとれば,

$$p^e = N_{K/\mathbf{Q}}(\alpha) = \frac{a^2 - b^2 d}{4} \geqq \frac{|d|}{4}.$$

$$\therefore \quad e \geqq \frac{\log(|d|/4)}{\log p}.$$

補題より, ERH の仮定の下で, $p \leqq 6\log^2|d|$ であり, $d \equiv 1 \pmod 8$ ならば, 無条件で $p = 2$ である. □

定理 3 では, 無条件の結果として, $p = 2$ の場合のみ記したが, 当然 p が (小さい) 奇素数の場合も同様の評価が書ける. すなわち, e の下からの評価が難しい問題となるのは, 小さい素数がすべて完全分解しないような体についてである.

現在のところ, 類数の小さい虚 2 次体を決定する問題では, 面倒かつ複雑な計算を強いられているが, 上の補題が無条件で証明されれば, この問題はつまらない問題 (単なる類数の計算問題) へと転落するわけである[1].

定理 3 の証明を見ればわかるように,

- CM-拡大における総虚な整数の norm の下からの評価,
- CM-拡大において完全分解する norm 最小の素 ideal の norm の上からの評価 (Tchebotarev density theorem の effective version)

[1] 1996 年 5 月 2 日付の Number Theory List 宛の Buell の e-mail によれば, 彼は判別式の絶対値が 2.2×10^8 以下の虚 2 次体の類群をすべて計算したそうである.

があれば, 最大実部分体が有理数体である虚2次体に限定する必要はない. 前者については, CM-体の最大実部分体の類数が1であれば, 容易に同様の評価が得られ, 後者についても, やはり Bach による結果 [4] と Bach と Sorenson によるその改良 [5] がある. (彼等の結果は CM-拡大に限定されない.) したがって, (Bach と Sorenson による結果を用いて) 定理3は次のように一般化される:

定理 4. K_+を類数1の総実代数体とし, Kをその *CM*-拡大体とする. K の次数を n とすれば, *ERH* の仮定の下で,

$$\begin{aligned}\exp \mathrm{Cl}(K) &\geqq \frac{\log(N_{K_+/\mathbf{Q}}(d(K/K_+)/4))}{\log((4\log|d(K)|+2.5n+5)^2)} \\ &= \frac{\log|d(K)|-2\log d(K_+)-n\log 2}{2\log(4\log|d(K)|+2.5n+5)}.\end{aligned}$$

定理4で, $n=2$ (虚2次体) としたものは, $|d|>e^5$ のとき, 定理3より良い評価を与える. より一般に, 判別式の絶対値あるいは次数が大きいときほど, CM-拡大において完全分解する norm 最小の素 ideal の norm の上からの評価が改良されるので, CM-拡大の類群の冪指数に関するより良い評価が得られる.

定理4から, ERH の仮定の下で, 類数1の総実代数体を固定すれば, 類群の冪指数が一定以下の CM-拡大は高々有限個しかないことがわかる. なお, Earnest と Körner [12] は, (必ずしも類数1でない) 一定の総実代数体上の総虚2次拡大体で, 類群の冪指数が一定の2冪であるものの個数の有限性を (無条件で) 証明している. ほかにもいくつか類似の結果が存在する. 例えば, K. Horie と M. Horie [19] は一般の素数 l について, 類群の冪指数が一定の l-冪以下の特殊な CM-体の個数の有限性を証明した (詳細は [19] 参照のこと). 彼等の結果から特に, 類群の冪指数が2以下の2冪次虚 Abel 体の個数の有限性がしたがう. すなわち, (B) を (前半はそのままで) $\boxed{\text{2 冪次虚 Abel 体}}$ まで拡張した結果が存在する. しかしながら, 類群の冪指数を2以下と限っても, $\boxed{\text{虚 Abel 体}}$ にまでは拡張されていない. もちろん, 理想は "任意の自然数 Nについて, 類群の冪指数が N以下の $\boxed{\text{CM-体}}$ は高々有限個しかない" にまで拡張することであるが, GRH を仮定しても未解決な問題である.

1.3 CM-体以外について.

類数あるいは類群の指数についての類似あるいは部分的な finiteness theorem は, CM-体だけでなく, 以下の体についても得られている:

- $\mathbf{Q}(\sqrt{m^2+r})$, $r \mid 4m$ (Extended Richaud-Degert type (ERD type) の実 2 次体);
- $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{m^3+r})$, $r \mid 3m^2$ (Rudman-Stender type の純 3 次体) ([7, Theorem 2.1] 参照.);
- 有限体上の 1 変数総実代数函数体の (必ずしも 2 次でない) 総虚拡大. (類数については, [2] 参照. 定理 3 に対応する結果が [14] および [20] に見られるが, [20] の結果は正しくないと思われたので, 著者に確認を取った. また, 因子類群についても類似の結果がある.)

上に上げた ERD type の実 2 次体, Rudman-Stender type の純 3 次体は, その基本単数が小さく, したがって, $\log R$ (R は単数規準) が $\log\sqrt{|d|}$ (d は判別式) に比べてかなり小さい ($R = O(\log\log|d|)$) ことがわかっているので, (例えば, Brauer-Siegel の定理により) finiteness theorem が示される. また, 函数体については, 代数体の場合と違って, Weil 予想が解決しているので, 結果が無条件になる.

2 Characterization

K_+を類数 1 の総実代数体とし, Kをその CM-拡大体とする. K_+の素 ideal $\mathfrak{p}$ は Kで $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}\mathfrak{P}'$と完全分解するとする. $e = \exp \mathrm{Cl}(K)$ とおくと,

$$N_{K/\mathbf{Q}}\mathfrak{P}^e = N_{K_+/\mathbf{Q}}\mathfrak{p}^e \geqq N_{K_+/\mathbf{Q}}(d(K/K_+)/4)$$

が成り立つ. したがって, 多くの場合に, e が小さければ, norm が小さい素 ideal は K/K_+で完全分解しないことがわかる. 類数あるいは類群の指数が小さい CM-体の特徴づけと言えるものは, 現在ではこれだけといっていいであろう. この idea を決定問題に適用すれば, (相対) 類数の計算量を劇的に減らすことができる. このことを特に強調したのは Louboutin [23] であるが, 古くは類数 1 の虚 2 次体の決定がなされる前に, (存在しないであろう) 第 10 番目の虚 2 次体の導手の下界を引き上げるために, この idea (の言い換え) が Dickson, Lehmer, Shanks 等に有効に利用された.

類数あるいは類群の指数が虚2次体においては小さい素数は完全分解しないということは，ある種の2次多項式の値の素数性と関係している．これは Euler が発見した次の有名な事実にまで遡れる:

Fact. (L. Euler) 2次多項式 $x^2 - x + 41$ は $x = 1, \cdots, 40$ に対して素数値を取る．

1912年に Rabinovitsch は上の Fact が虚2次体 $\mathbf{Q}(\sqrt{-163})$ の類数が1であることに関係していることを次のより一般的な形で証明した:

定理 5. (G. Rabinovitsch [27]) p を $p \equiv 3 \pmod 8$ なる素数とし，$l = (p+1)/4$ とおく．このとき，次の2つは同値である:

(i) $h(\mathbf{Q}(\sqrt{-p})) = 1$.

(ii) $f(x) = x^2 - x + l$ は $1 \leqq x < l$ なるすべての整数 x に対して素数になる．

証明. (i)$\Longrightarrow$(ii) のみ示す．背理法による．ある整数 x, $1 \leqq x < l$ について，$f(x)$ は合成数であると仮定し，その最小の素因数を q とし，$f(x) = aq$ とする．条件から l は奇数なので，q も奇数であることに注意する．このとき，

$$4q^2 \leqq 4aq = (2x-1)^2 + p < (2l-1)^2 + p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2.$$

不等式の両端から $q < l$ であり，真ん中の等号から $(-p/q) = 1$ である．すなわち，$\mathbf{Q}(\sqrt{-p})$ で完全分解する l より小さい素数，すなわち，$p/4 = |d(\mathbf{Q}(\sqrt{-p}))|/4$ より小さい素数が存在する．したがって，上に述べたことから，$h(\mathbf{Q}(\sqrt{-p})) = 1$ ではありえない．□

この簡明な証明は Ayoub と Chowla [3] による．(ただし，[3] では $x^2 + x + l$, $1 \leqq x \leqq l$ の素数性を問題にしている．)

定理5のような2次体の類数 (あるいは類群の冪指数) と2次多項式の値 (の素因数の個数等) との間の関係については，虚2次体だけでなく，実2次体についてもいろんな結果がある．この方面の研究に一番熱心なのは Mollin である．彼の本 [24] あるいは解説記事 [25] を参照されたい．

3 不定方程式との関係

講演の際には述べられなかったが，虚2次体の類数問題と不定方程式との関係について，簡単に触れておこう．まず，類数1について，次が成り

立つ.

定理 6. (K. Heegner et al. [28] 参照.) 判別式が $-4, -7, -8$ でない類数 1 の虚 2 次体の全体

$$\{\ p \equiv 3 \pmod 8\ \mid\ 素数,\ h(\mathbf{Q}(\sqrt{-p})) = 1\ \}$$

とある不定方程式 (*Heegner curve*) の整数点の集合

$$\{\ (X, Y) \in \mathbf{Z}^2\ \mid\ 2X(X^3+1) = (2X^2 - Y)^2\ \}$$

との間には 1 対 1 の対応がつく.

類数 2 の虚 2 次体についても類似の結果が Antoniadis 等によって得られている ([11] 参照) が, 類数 1 の場合に比べてかなり複雑で, 対応もいくつかに分けなければならない. 類数 3 以上については, まだそのような結果は得られていないので, 不定方程式の研究をされている方たちに, 研究を促したいと思っていたのだが, 講演の際は時間が足りなくなってしまった. また, 類数 1 でも虚 2 次体だけでなく, より高次の体についてはどうなのであろうか? これは今後の興味ある研究課題と思われる.

4 Determination

これについても, 講演の際には述べられなかった. 決定問題については, 現在もいろんな形で進行中であるが, ごく簡単に得られている結果を述べよう.

虚 2 次体については, 類数 7 以下のもの, および奇数類数 25 以下のものがすべて決定されている. ([1, 31] 参照.)

虚 2 次体以外では, 類数 1 以外はほとんど決定されていない. 類数 1 の虚 Abel 体の決定は筆者が完成させた [33]. それ以後, Louboutin を中心として, 類数 1 の非 Abel 正規 CM-体の決定が低い次数から順に徐々になされている. 現在では次数 32 未満は 24 次を除いてすべて決定されている. この問題においては, (相対) 類数の下からの評価という基本的かつ解析的な問題のほかに, 類数 1 の非 Abel 正規 CM-体の Galois 群となりうる有限群の決定のような代数的な問題もある. 例えば, 一般 4 元数群などはこのような体の Galois 群とはなりえない. また, このような体のうち, 2 面体群を Galois 群とするものはすべて決定された [21]. 体の次数が高くなると, (相対) 類数を如何に計算するかということも問題となる.

K.-Y. Chang と S.-H. Kwon [8, 9] はその Hilbert 類体と種の体が一致するような虚 Abel 体をすべて決定した.

5 文献について

研究代表者の方から, 文献をできるだけ詳しく, との要望があったが, この theme に関する文献の数は膨大なので, ごく一部を挙げるにとどめた. そこで, 最後に簡単に補足しておこう. 膨大な数の文献の割には, expositery なものは極めて少ないように思われる. Gauss の類数問題については, 少し古いが, Goldfeld [16] を読むことを勧める. CM-体の類群の冪指数の問題については, Earnest [13] が expositery に書かれている. 類数の評価, あるいは計算などについては触れられなかったが, これらも含めて, この theme に関して最近一番成果をあげており, 現在もさかんに研究しているのは, Louboutin である. したがって, 特に最新の情報を含めて詳しく知りたいと思ったら, 彼の文献にあたってみられたい.

参考文献

[1] S. Arno, M. L. Robinson, and F. S. Wheeler : *Imaginary quadratic fields with small odd class number,* Acta Arith. **83** (1998), no. 4, 295–330.

[2] Y. Aubry : *Class number in totally imaginary extensions of totally real function fields,* Finite fields and applications (Glasgow, 1995) (S. D. Cohen and H. Niederreiter, eds.), London Math. Soc. Lecture Note, Ser. 233, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, pp. 23–29; MR 97k:11163.

[3] R. G. Ayoub and S. Chowla : *On Euler's polynomial,* J. Number Theory **13** (1981), no. 4, 443–445; MR 83h:10013.

[4] E. Bach : *Explicit bounds for primality testing and related problems,* Math. Comp. **55** (1990), no. 191, 335–380; MR 91m:11096.

[5] E. Bach and J. Sorenson: *Explicit bounds for primes in residue classes,* Mathematics of Computation 1943–1993: A half-century of computational mathematics (Vancouver, BC, 1993) (W. Gautschi,

ed.), Proc. Sympos. Appl. Math., vol. 48, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, pp. 535–539; MR 96e:11152.

[6] D. W. Boyd and H. Kisilevsky : *On the exponent of the ideal class groups of complex quadratic fields,* Proc. Amer. Math. Soc. **31** (1972), 433–436; MR **44** #6644.

[7] D. Byeon : *Class number one problem for pure cubic fields of Rudman-Stender type,* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **72** (1996), no. 7, 166-167; MR .

[8] K.-Y. Chang and S.-H. Kwon : *On the imaginary cyclic number fields,* preprint, 1997.

[9] K.-Y. Chang and S.-H. Kwon : *The noncyclic imaginary abelian number fields with class numbers equal to their genus class numbers,* preprint, 1998.

[10] S. Chowla : *An extension of Heilbronn's class number theorem,* Quart. J. Math. **5** (1934), 304–307.

[11] B. M. M. de Weger : *A hyperelliptic diophantine equation related to imaginary quadratic number fields with class number* 2, J. reine angew. Math. **427** (1992), 137–156; MR 93d:11034; Correction : ibid. **441** (1993), 217–218; MR 94h:11026.

[12] A. G. Earnest and O. H. Körner : *On ideal class groups of* 2*-power exponent,* Proc. Amer. Math. Soc. **86** (1982), no. 2, 196–198; MR 83k:12005.

[13] A. G. Earnest : *Finiteness theorems for number fields having class groups of given* 2*-power exponent,* Number theory and applications (Banff, AB, 1988) (R. A. Mollin, ed.), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci., 265, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989, pp. 373–380; MR 92j:11127.

[14] Fang Lu : *On the exponent of ideal class groups of imaginary Kummer function fields,* Algebra Colloq. **2** (1995), no. 3, 203–208; MR 96f:11146.

[15] C. F. Gauss : *Disquisitiones Arithmeticae,* (1801), Art 316; (English transl.) : Translated by A. A. Clarke. Revised by W. C. Waterhouse with the help of C. Greither and A. W. Grootendorst, Springer-Verlag, New York and Berlin, 1986; (日本語訳) : ガウス整数論 (高瀬正仁訳), 朝倉書店, 東京, 1995.

[16] D. M. Goldfeld : *Gauss' class number problem for imaginary quadratic fields,* Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) **13** (1985), no. 1, 23–37; MR 86k:11065.

[17] M. Hamamura : *On absolute class fields of certain algebraic number fields,* Nat. Sci. Rep. Ochanomizu Univ. **32** (1981), no. 1, 23–34; MR 83a:12014.

[18] H. Heilbronn : *On the class-number in imaginary quadratic fields,* Quart. J. Math. Oxford (1) **18** (1934), 150–160.

[19] K. Horie and M. Horie : *CM-fields and exponents of their ideal class groups,* Acta Arith. **55** (1990), no. 2, 157–170; MR 91k:11098.

[20] H. Kisilevsky and F. Pappalardi : *On the exponent of ideal class groups of imaginary extension of* $\mathbb{F}_q(x)$, Acta Arith. **72** (1995), no. 4, 311–321; MR 96j:11158.

[21] Y. Lefeuvre : *The class number one problem for dihedral CM-fields,* preprint, 1997.

[22] F. Lemmermeyer, S. Louboutin, and R. Okazaki : *The class number one problem for some non-abelian normal CM-fields of degree* 24, preprint, 1997.

[23] S. Louboutin : *Powerful necessary conditions for class nunber problems,* Math. Nachr. **183** (1997), 173–184; MR 97m:11135.

[24] R. A. Mollin : *Quadratics,* The CRC Press Ser. on Discrete Mathematics and its Applications, CRC Press, Inc., Boca Raton, 1996.

[25] R. A. Mollin : *Prime-producing quadratics,* Amer. Math. Monthly **104** (1997), no. 6, 529–544.

[26] A. M. Odlyzko : *Some analytic estimates of class numbers and discriminants,* Invent. Math. **29** (1975), no. 3, 275–286; MR **51** #12788.

[27] G. Rabinowitsch : *Eindeutigkeit der Zerlegung in Primzahlfactoren in quadratischer Zahkörpern,* J. reine angew. Math. **142** (1913), 153–164.

[28] H. M. Stark : *On the "gap" in a theorem of Heegner,* J. Number Theory **1** (1969), no. 1, 16–27; MR **39** #2724.

[29] H. M. Stark : *Some effective cases of the Brauer-Siegel theorem,* Invent. Math. **23** (1974), no. 1, 135–152; MR **49** #7218.

[30] K. Uchida : *Class numbers of imaginary abelian number fields. I,* Tôhoku Math. J. (2) **23** (1971), 97–104; MR **44** #2727.

[31] C. Wagner : *Class number* 5, 6 *and* 7, Math. Comp. **65** (1996), no. 214, 785–800; MR 96g:11135.

[32] P. J. Weinberger : *Exponents of the class groups of complex quadratic fields,* Acta Arith. **22** (1973), 117–124; MR **47** #1776.

[33] K. Yamamura : *The determination of the imaginary abelian number fields with class number one,* Math. Comp. **62** (1994), no. 206, 899–921; MR 94g:11096.